О рациональных приближениях алгебраических чисел высших порядков и некоторой параметризации обобщенных уравнений Пелля.

Заторский Р.А.

Предложен новый алгебраический объект – рекуррентные дроби, являющийся n-мерным обобщением непрерывных дробей, с помощью которого построен алгоритм рациональных приближений алгебраических иррациональностей. Для обобщенных уравнений Пелля построена некоторая параметризация.

A new algebraic object is introduced - recurrent fractions, which is an n-dimensional generalization of continued fractions. It is used to describe an algorithm for rational approximations of algebraic irrational numbers. Some parametrization for generalized Pell's equations is constructed.

1 Вступление

1. *Рациональные приближения алгебраических иррациональностей.* Существует два вида алгоритмов связанных с алгебраическими иррациональностями высших порядков. К первому виду относятся алгоритмы построения по заданным алгебраическим иррациональностям n-мерных обобщений непрерывных дробей, а ко второму – алгоритмы вычисления рациональных приближений к заданным n-мерным обобщениям непрерывных дробей. Обоим алгоритмам посвящено множество работ выдающихся аналитиков начиная с Эйлера.

В основном, все усилия аналитиков были сконцентрированы в направлении обобщения непрерывных дробей и обобщения теоремы Лагранжа о рациональных приближениях квадратических иррациональностей укороченными периодическими цепными дробями. При этом самыми эффективными подходами оказались матричный, яркими представителями которого являются Эйлер[1], Пуанкаре[2], Якоби[3], Перрон[4], Брун[5], Бернштейн[6], Пустыльников[7]. Матричные алгоритмы, в общем случае, могут быть описаны рекуррентным равенством

$$P_{k+1} = A_k \cdot P_k,$$

где P_k – n-мерный вектор, A_k – квадратная матрица с целыми элементами, некоторым образом, зависящая от вектора P_k, причем $\det A_k = \pm 1$. Они просты, но не всегда обладают аналогом свойства периодичности цепных дробей для квадратических иррациональностей.

Второй подход базируется на геометрии линейных однородных форм и целочисленных решеток, представителями которого являются Дирихле[8], Ермит[9], Клейн[10], Минковский[11], Вороной[12], Скубенко[13], Арнольд[14], Брюно[15]. Эти алгоритмы дают хорошие приближения, но плохо программируются и обобщаются на высшие порядки.

Рассмотрим отдельно два алгоритма имеющие непосредственное отношение к настоящей работе. Это алгоритмы Фюрстенау[19] и Пуанкаре[20].

Алгоритм Фюрстенау был предложен в 1876 году и либо был незамечен либо забыт. В нем, по заданным действительным числам p и q, строится последовательность равенств

$$p = a_0 + \frac{q_1}{p_1},\ p_1 = a_1 + \frac{q_2}{p_2},\ p_2 = a_2 + \frac{q_3}{p_3}, \ldots,$$

$$q = b_0 + \frac{c_1}{p_1},\ q_1 = b_1 + \frac{c_2}{p_2},\ q_2 = b_2 + \frac{c_3}{p_3}, \ldots.$$

Далее, при помощи последовательных подстановок, строятся выражения для p и q :

$$p = a_0 + \cfrac{b_1 + \cfrac{c_2}{a_2 + \cfrac{b_3 + \frac{c_4}{a_4 + \ldots}}{a_3 + \frac{b_4 + \ldots}{a_4 + \ldots}}}}{a_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{c_3}{a_3 + \frac{b_4 + \ldots}{a_4 + \ldots}}}{a_2 + \cfrac{b_3 + \frac{c_4}{a_4 + \ldots}}{a_3 + \frac{b_4 + \ldots}{a_4 + \ldots}}}}, \tag{1}$$

$$q = b_0 + \frac{c_1}{a_1 + \frac{b_2 + \frac{c_3}{a_3 + \frac{b_4+\dots}{a_4+\dots}}}{a_2 + \frac{b_3 + \frac{c_4}{a_4+\dots}}{a_3 + \frac{b_4+\dots}{a_4+\dots}}}}, \tag{2}$$

которые Фюрстенау называет непрерывными дробями 2-го класса. В случае $c_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots$, они вырождаются в непрерывные дроби.

Суть алгоритма Пуанкаре, предложенного им в 1885 году, выражена следующей теоремой:

Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ является решением разностного уравнения

$$f_{n+k} + \alpha_{n,1} f_{n+k-1} + \dots + \alpha_{n,k} f_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \dots$$

с предельно постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого различны по модулю. Тогда либо $f_n = 0$ при всех $n \geqslant n_0$, либо существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$, и этот предел равен одному из корней характеристического многочлена.

В работе, для построения рациональных приближений алгебраических иррациональностей, использованы идеи алгоритмов Фюрстенау и Пуанкаре. Так как изображения (1),(2), которыми пользовался для своего обобщения Фюрстенау, не удобны в работе, то мы для их изображения привлекаем аппарат параперманентов треугольных матриц [22]. При этом получаемые изображения не только близкие к изображениям непрерывных дробей, но и позволяют естественно ввести понятия порядка дроби и периодической дроби, а также с помощью параперманентов треугольных матриц, свойства которых хорошо изучены, показать, что периодические дроби высших порядков являются изображениями алгебраических иррациональностей высших порядков.

Центральными теоремами в этой части работы являются теоремы 3.1 и 3.2. Эти теоремы устанавливают связь между максимальными по модулю действительными корнями алгебраических уравнений n-го порядка и рекуррентными дробями n-го порядка. Теорема 5.1 о связи некоторых алгебраических форм n-го порядка с алгебраическими уравнениями n-го порядка, взятая вместе с предыдущими двумя теоремами, в значительной степени решает вопрос о рациональных приближениях алгебраических иррациональностей.

2. *Кольца целых алгебраических чисел полей $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})$.*

Во второй части работы изучаются целые алгебраические числа вида

$$s_0 + s_1 \sqrt[n]{m} + s_2 \sqrt[n]{m^2} + \dots + s_{n-1} \sqrt[n]{m^{n-1}}$$

и, в частности, единицы числовых полей $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})$. Отметим, что числовые поля $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})$ при $n = 2, 3$ исследовались еще в работах Вороного[16], Делоне и Фадеева[17].

Описание структуры множества фундаментальных единиц в кольце целых чисел дает теорема Дирихле из которой следует, что по значению коэффициентов минимального многочлена при помощи конечного числа испытаний можно найти множество фундаментальных единиц. Вороной построил алгоритм отыскания множества фундаментальных единиц кубических полей, но он сложный по числу операций и плохо обобщается на высшие порядки [18].

Известно[6], что нахождение целых единиц поля $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})$ связано с решением Диофантова уравнения вида

$$\begin{vmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Основным результатом второй части работы является некоторая параметризация этих уравнений при

$$n = 3, 5, 7, 9, 11.$$

При этом возникает числовой треугольник (см. примечание 5.1.). Дальнейшее изучение этого числового треугольника может пролить свет на общее решение приведенного выше диофантова уравнения.

Автор благодарен Манину Ю.И за консультации при написании этой работы.

2 Предварительные сведения

Приведем некоторые сведения о парадетерминантах и параперманентах треугольных матриц, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Пусть K — некоторое поле.

Определение 2.1. *Треугольную таблицу*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{3}$$

элементов поля K назовем ***треугольной матрицей.***

Определение 2.2. *Каждому элементу a_{ij} треугольной матрицы (3) поставим в соответствие треугольную матрицу с этим элементом в левом нижнем углу, которую назовем* ***углом*** *заданной треугольной матрицы и обозначим через $R_{ij}(A)$.*

Очевидно, что угол $R_{ij}(A)$ является треугольной матрицей $(i-j+1)$–го порядка. В угол $R_{ij}(A)$ входят только те элементы a_{rs} треугольной матрицы (3), индексы которых удовлетворяют соотношению $j \leqslant s \leqslant r \leqslant i$.

Ниже мы будем считать, что

$$\operatorname{ddet}(R_{01}(A)) = \operatorname{ddet}(R_{n,n+1}(A)) = pper(R_{01}(A)) = pper(R_{n,n+1}(A)) = 1.$$

Так, в треугольной матрице:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

угол $R_{42}(A)$ имеет вид:

$$R_{42}(A)=\begin{pmatrix} a_{22} & & \\ a_{32} & a_{33} & \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.3. [22]. *Если A —треугольная матрица (3), то ее парадетерминантом и параперманентом назовем соответственно числа:*

$$\operatorname{ddet}(A)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{p_1+\ldots+p_r=n}(-1)^{n-r}\prod_{s=1}^{r}\{a_{p_1+\ldots+p_s,p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$\operatorname{pper(A)}=\sum_{r=1}^{n}\sum_{p_1+\ldots+p_r=n}\prod_{s=1}^{r}\{a_{p_1+\ldots+p_s,p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

где суммирование производится по множеству натуральных решений уравнения $p_1+p_2+\ldots+p_r=n$.

Определение 2.4. *Прямоугольную таблицу элементов треугольной матрицы (3) назовем вписанной в эту матрицу, если одна ее вершина совпадает с элементом a_{n1}, а противоположная к ней — с элементом a_{ii}, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Эту таблицу обозначим через $T(i)$.*

Если в определении 2.4 $i = 1$, или $i = n$, то вписанная прямоугольная таблица вырождается соответственно в первый столбец или в n-тую строчку этой треугольной матрицы.

При нахождении значения парадетерминанта и параперманента треугольных матриц удобно пользоваться *алгебраическими дополнениями.*

Определение 2.5. ***Алгебраическими дополнениями*** *D_{ij}, P_{ij} к факториальному произведению $\{a_{ij}\}$ ключевого элемента a_{ij} матрицы (3) назовем соответственно числа*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \operatorname{ddet}(R_{j-1,1}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}),$$

$$P_{ij} = pper(R_{j-1,1}) \cdot pper(R_{n,i+1}),$$

где $R_{j-1,1}$ и $R_{n,i+1}$ — углы треугольной матрицы (3).

Теорема 2.1. [22]. (Разложение парафункции по элементам вписанной прямоугольной таблице). *Пусть A — треугольная матрица (3), а $T(i)$ — некоторая вписанная в нее прямоугольная таблица элементов. Тогда справедливо равенство:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\} D_{rs}, \tag{4}$$

$$pper(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\} P_{rs}, \tag{5}$$

где D_{rs} и P_{rs} — соответственно алгебраические дополнения к факториальному произведению ключевого элемента a_{rs}, который принадлежит таблице $T(i)$.

Следствие 2.1.1. *Если $i = 1$, то теорема 2.1 дает разложение парафункций по элементам первого столбца и равенства (4), (5) примут вид:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n} \{a_{r1}\} D_{r1} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \{a_{r1}\} \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,r+1}),$$

$$pper(A) = \sum_{r=1}^{n} \{a_{r1}\} P_{r1} = \sum_{r=1}^{n} \{a_{r1}\} \cdot pper(R_{n,r+1}).$$

Если же $i = n$, то получим разложение парафункций по элементам последней строчки:

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\} D_{ns} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n+s} \{a_{ns}\} \cdot \operatorname{ddet}(R_{s-1,1}),$$

$$pper(A) = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\} P_{ns} = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\} \cdot pper(R_{s-1,1}).$$

Парадетерминанты и параперманенты треугольных матриц находят все больше применений в теории чисел и комбинаторном анализе. Более основательно с ними можно познакомится в [22].

3 Рекуррентные дроби

Определение 3.1. *Пусть a_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant i < \infty$ — некоторые целые числа. Алгебраические объекты вида*

$$\alpha = \frac{\left[\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & & & & & & & \\
\frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\
\vdots & \dots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n-2,n-1}} & \frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-3,n-1}} & \dots & a_{1,n-1} & & & & \\
\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \dots & \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} & a_{1,n} & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \dots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & \\
0 & 0 & \dots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_\infty}{\left[\begin{array}{ccccccc}
a_{12} & & & & & & \\
\vdots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-3,n-1}} & \dots & a_{1,n-1} & & & & \\
\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \dots & \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} & a_{1,n} & & & \\
\frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \dots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & \\
0 & \dots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_\infty} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_{11} & & & & & & & \\
\frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\
\vdots & \dots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n-2,n-1}} & \frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-3,n-1}} & \dots & a_{1,n-1} & & & & \\
\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \dots & \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} & a_{1,n} & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \dots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & \\
0 & 0 & \dots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_\infty \tag{6}$$

,

и

$$
\frac{P_m}{Q_m}=\frac{\left[\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & & & & & & & \\
\frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\
\vdots & \dots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \dots & a_{1,n} & & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \dots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\
0 & 0 & \dots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \dots & a_{1,m}
\end{array}\right]_m}{\left[\begin{array}{cccccccc}
a_{12} & & & & & & & \\
\frac{a_{23}}{a_{13}} & a_{13} & & & & & & \\
\vdots & \dots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \frac{a_{n-2,n}}{a_{n-3,n}} & \dots & a_{1,n} & & & & \\
\frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \frac{a_{n-1,n+1}}{a_{n-2,n+1}} & \dots & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+2}}{a_{n-1,n+2}} & \dots & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \dots & a_{1,m}
\end{array}\right]_{m-1}}=
$$

$$
=\left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_{11} & & & & & & & \\
\frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\
\vdots & \dots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \dots & a_{1,n} & & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \dots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\
0 & 0 & \dots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \dots & a_{1,m}
\end{array}\right]_m, \qquad (7)
$$

назовем соответственно ***рекуррентной дробью*** $n-$***го порядка*** *и ее* $m-$***тым рациональным укорочением***.

Разлагая параперманенты числителя и знаменателя рационального укорочения (7) рекуррентной дроби (6) по элементам последней строчки, получим линейные рекуррентные уравнения $n-$го порядка

$$P_m = a_{1m}P_{m-1} + a_{2m}P_{m-2} + \ldots + a_{nm}P_{m-n},\ m = 1, 2, \ldots,$$

$$Q_m = a_{1m}Q_{m-1} + a_{2m}Q_{m-2} + \ldots + a_{nm}Q_{m-n},\ m = 1, 2, \ldots,$$

где

$$P_i = \begin{cases} 1, \text{если } i = 0, \\ 0, \text{если } i < 0, \end{cases} \quad Q_i = \begin{cases} 1, \text{если } i = 1-n, \\ 0, \text{если } 2-n \leqslant i \leqslant 0, \end{cases} \quad a_{n1} = 1,$$

дающие эффективный алгоритм вычисления значений рациональных укорочений рекуррентных дробей $n-$го порядка.

Значение конечной границы $m-$тых рациональных укорочений рекуррентной дроби $n-$го порядка, при $m \to \infty$ назовем значением соответственной рекуррентной дроби $n-$го порядка.

Таким образом, рекуррентная дробь второго порядка при $a_{1i}=q_i$, $a_{2i}=p_i$ имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} q_1 & & & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\ 0 & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\ 0 & 0 & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_m}{q_m} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{array}\right]_\infty$$

и является иным изображением непрерывной дроби

$$q_1+\cfrac{p_2}{q_2+\frac{p_3}{q_3+\frac{p_4}{q_4+\ldots+\frac{p_m}{q_m+\ldots}}}}.$$

Определение 3.2. *Рекуррентную дробь $n-$го порядка (6) назовем $k-$периодической если ее элементы удовлетворяют уравнениям*

$$a_{i,rk+j}=a_{i,j},\ i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,k.$$

Определение 3.3. *Две рекуррентные дроби $n-$го порядка назовем равными, если $m-$тые $(m=1,2,\ldots)$ рациональные укорочения этих дробей равны.*

Определение 3.4. *Рекуррентную дробь $n-$го порядка (6) назовем обыкновенной рекуррентной дробью, если выполнены равенства*

$$a_{nn}=a_{n,n+1}=a_{n,n+2}=\ldots=1.$$

Лемма 3.1. *i) Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — различные корни алгебраического уравнения*

$$x^n=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n,\ a_n\neq 0, \tag{8}$$

причем модуль действительного корня x_1 превышает модули всех других корней этого уравнения, тогда справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty}\frac{p_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{p_{m-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=x_1, \tag{9}$$

где

$$p_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=m}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n},\ m=1,2,\ldots- \tag{10}$$

полный однородный симметрический многочлен;

Справедливо и обратное утверждение. Если $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — различные корни алгебраического уравнения (8) и справедливо равенство (9), то x_1 – действительный корень наибольшего модуля алгебраического уравнения (8).

ii) параперманент

$$P_m=\left[\begin{array}{ccccccc} a_1 & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & & & & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \ldots & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \ldots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \ldots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{array}\right]_m, P_0=1 \tag{11}$$

и однородный симметрический многочлен

$$p_m(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ \ p_0(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1$$

удовлетворяют одному и тому же линейному рекуррентному уравнению вида

$$u_m=a_1u_{m-1}+a_2u_{m-2}+\ldots+a_nu_{m-n}, \tag{12}$$

т.е. их значения совпадают при любом натуральном m.

Доказательство. i)

Производящей функцией полного симметрического многочлена (10) является функция $\prod_{i=1}^n\frac{1}{1-x_iz}$. Разложим ее на простейшие дроби, получим

$$\prod_{i=1}^n\frac{1}{1-x_iz}=\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{n-1}}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)(1-x_iz)}.$$

Найдем коэффициент $p_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при z^m в разложении последней функции в степенной ряд. Он равен

$$\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{m+n-1}}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}.$$

Следовательно

$$\lim_{m\to\infty}\frac{p_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{p_{m-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{m+n-1}}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}}{\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{m+n-2}}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}}=$$

$$=x_1\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{1+\sum_{i=2}^n(\frac{x_i}{x_1})^{m+n-1}\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}}{1+\sum_{i=2}^n(\frac{x_i}{x_1})^{m+n-2}\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}}.$$

Таким образом, справедливость п. i) леммы 3.1 следует из последних равенств.

ii) То, что параперманент (11) удовлетворяет линейному рекуррентному уравнению (12) непосредственно видно из разложения этого параперманента по элементам первого столбца или последней строчки.

Докажем, что полный однородный симметрический многочлен также удовлетворяет этому рекуррентному уравнению. Производящей функцией элементарных симметрических многочленов, построенных с помощью переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$, является

$$\sigma(z)=\sum_{m=0}^\infty\sigma_mz^m=\prod_{i=0}^n(1+x_iz),\ \sigma_0=1,$$

а производящей функцией полных однородных многочленов, построенных с помощью тех же переменных, как отмечалось выше, — функция

$$p(z)=\sum_{m=0}^\infty p_mz^m=\prod_{i=0}^n(1-x_iz)^{-1},\ p_0=1.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\sigma(z)p(-z)=1.$$

Таким образом, свертка $\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\sigma_i p_{m-i}$ равна нулю, т.е. справедливо рекуррентное соотношение

$$p_m = \sigma_1 p_{m-1} - \sigma_2 p_{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}\sigma_m.$$

Учитывая теорему Виета для уравнения (8) получим соотношения $\sigma_i = (-1)^{i-1}a_i$ и, следовательно, линейное рекуррентное уравнение

$$p_m = a_1 p_{m-1} + a_2 p_{m-2} + \ldots + a_n p_{m-n}.$$

□

Теорема 3.1. *Пусть задано алгебраическое уравнение (8) с попарно различными корнями. Если для $m-$го рационального укорочения $1-$периодической рекуррентной дроби $n-$го порядка*

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_1 & & & & & & & \\
\frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & & \\
\vdots & \ldots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \ldots & a_1 & & & & \\
\frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \ldots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\
0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \ldots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\
0 & 0 & \ldots & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \ldots & a_1
\end{array}\right]_\infty, \tag{13}$$

построенной при помощи коэффициентов этого уравнения, существует конечный ненулевой действительный предел при $m \to \infty$, т.е.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{P_m}{Q_m} = x \neq 0,$$

то такая рекуррентная дробь $n-$того порядка является изображением действительного корня алгебраического уравнения (8), модуль которого больше всех модулей других корней этого уравнения.

Доказательство. 1. Докажем сначала, что значение рекуррентной дроби (13) является корнем уравнения (8). Разложим числитель $m-$го рационального укорочения (13) рекуррентной дроби $n-$го порядка по элементам первого столбца:

$$P_m = a_1 P_{m-1} + a_2 P_{m-2} + \ldots + a_n P_{m-n}.$$

Поскольку $P_{m-1} = Q_m$, то

$$\frac{P_m}{Q_m} = \frac{P_m}{P_{m-1}} = \frac{a_1 P_{m-1} + a_2 P_{m-2} + \ldots + a_n P_{m-n}}{P_{m-1}} =$$

$$= a_1 + \frac{a_2}{\frac{P_{m-1}}{P_{m-2}}} + \frac{a_3}{\frac{P_{m-1}}{P_{m-3}}} + \ldots + \frac{a_n}{\frac{P_{m-1}}{P_{m-n}}} =$$

$$= a_1 + \frac{a_2}{\frac{P_{m-1}}{P_{m-2}}} + \frac{a_3}{\frac{P_{m-1}}{P_{m-2}}\cdot\frac{P_{m-2}}{P_{m-3}}} + \ldots + \frac{a_n}{\frac{P_{m-1}}{P_{m-2}}\cdot\frac{P_{m-2}}{P_{m-3}}\cdot\ldots\cdot\frac{P_{m-n+1}}{P_{m-n}}}.$$

Так как по условию теоремы

$$\lim_{m\to\infty}\frac{P_m}{O_m}=x\neq 0,$$

то получим уравнение

$$x=a_1+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^{n-1}},$$

или уравнение (8).

2. Согласно второй части леммы 3.1 числитель m-того рационального укорочения рекуррентной дроби совпадает с полным однородным симметрическим многочленом m-того порядка с n переменными. Следовательно, справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty}\frac{P_m}{Q_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{p_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{p_{m-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=x,$$

где, согласно первой части леммы 3.1, x – корень наибольшего модуля. $\square$

Справедлива и обратная теорема:

Теорема 3.2. *Если алгебраическое уравнение (8), все корни которого попарно различны, имеет действительный корень x_1, модуль которого больше всех модулей других корней этого уравнения, то однопериодическая рекуррентная дробь*

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_1 & & & & & & & \\
\frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & & \\
\vdots & \ldots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \ldots & a_1 & & & & \\
\frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \ldots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\
0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \ldots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\
0 & 0 & \ldots & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \ldots & a_1
\end{array}\right]_\infty$$

является изображением этого корня.

Доказательство. Запишем алгебраическое уравнение (8) с ненулевым свободным членом в виде

$$x=a_1+\frac{a_2+\frac{a_3+\frac{a_4+\cdots+\frac{a_n}{x}}{x}}{x}}{x}.$$

При помощи бесконечных вложений последнее уравнение можно записать в виде равенств

$$x=a_1+\frac{a_2+\frac{a_3+\frac{a_4+\cdots+\frac{a_n}{a_1+\frac{a_2+\frac{a_3+\frac{a_4+\cdots+\frac{a_n}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}}{a_1+\frac{a_2+\frac{a_3+\frac{a_4+\cdots+\frac{a_n}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}}{a_1+\frac{a_2+\frac{a_3+\frac{a_4+\cdots+\frac{a_n}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}}{a_1+\frac{a_2+\frac{a_3+\frac{a_4+\cdots+\frac{a_n}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}{a_1+\ldots}}=$$

$$
= a_1\Big| + \cfrac{a_2\Big| + \cfrac{a_3\Big| + \cfrac{a_4\big| + \frac{a_5+\dots}{a_1+\dots}}{a_1\big| + \frac{a_2+\dots}{a_1+\dots}}}{a_1\Big| + \cfrac{a_2\big| + \frac{a_3+\dots}{a_1+\dots}}{a_1\big| + \frac{a_2+\dots}{a_1+\dots}}}}{a_1\Big| + \cfrac{a_2\Big| + \cfrac{a_3\big| + \frac{a_4+\dots}{a_1+\dots}}{a_1\big| + \frac{a_2+\dots}{a_1+\dots}}}{a_1\Big| + \cfrac{a_2\big| + \frac{a_3+\dots}{a_1+\dots}}{a_1\big| + \frac{a_2+\dots}{a_1+\dots}}}}. \tag{14}
$$

правая сторона которых зависит только от коэффициентов уравнения (3). Исследуем выражение правой части равенства (14).

Первым приближением к значению этого выражения является дробь, лежащая по левую сторону первой вертикальной черточки, т.е. дробь вида

$$
\frac{a_1}{1} = \frac{u_1}{u_0}.
$$

Другим приближением служит дробь, лежащая слева второй вертикальной черточки

$$
a_1 + \frac{a_2}{a_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_0}{a_1 u_0}.
$$

Третье приближение имеет вид

$$
a_1 + \frac{a_2 + \frac{a_3}{a_1}}{a_1 + \frac{a_2}{a_1}} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{a_1 u_2 + a_2 u_1 + a_3 u_0}{a_1 u_1 + a_2 u_0}
$$

и т. д.

По индукции можно показать, что m-тое приближение имеет вид

$$
\frac{a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \ldots + a_m u_0}{a_1 u_{m-2} + a_2 u_{m-3} + \ldots + a_{m-1} u_0},
$$

если $m \leqslant n$ и вид

$$
\frac{a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \ldots + a_m u_{m-n}}{a_1 u_{m-2} + a_2 u_{m-3} + \ldots + a_m u_{m-n-1}},
$$

если $m > n$.

Таким образом, m-тое приближение к значению исследуемого выражения совпадает с m-тым приближением рекуррентной дроби вида

$$
\left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_1 & & & & & & & \\
\frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & & \\
\vdots & \ldots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \ldots & a_1 & & & & \\
\frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \ldots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\
0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \ldots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\
0 & 0 & \ldots & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \ldots & a_1
\end{array}\right]_\infty .
$$

Но, согласно лемме 3.1 справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty}\left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_1 & & & & & & & \\
\frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & & \\
\vdots & \dots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \dots & a_1 & & & & \\
\frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \dots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\
0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \dots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
0 & 0 & \dots & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \dots & a_1
\end{array}\right]_m = \lim_{m\to\infty}\frac{p_m(x_1,x_2,\dots,x_n)}{p_{m-1}(x_1,x_2,\dots,x_n)} = x_1.$$

$\square$

Пример 3.1. Алгебраическое уравнение

$$x^7 = 448x^6 + 672x^5 + 560x^4 + 280x^3 + 84x^2 + 14x + 1$$

имеет действительный корень

$$x = 64 + 32\cdot\sqrt[7]{129} + 16\cdot\sqrt[7]{129^2} + 8\cdot\sqrt[7]{129^3} + 4\cdot\sqrt[7]{129^4} + 2\cdot\sqrt[7]{129^5} + \sqrt[7]{129^6} \approx$$

$$\approx 449.49777653359235287015302078.$$

Найдем несколько первых рациональных укорочений соответственной рекуррентной дроби

$$\left[\begin{array}{c|ccccccccc}
448 & & & & & & & & & \\
3/2 & 448 & & & & & & & & \\
5/6 & 3/2 & 448 & & & & & & & \\
1/2 & 5/6 & 3/2 & 448 & & & & & & \\
3/10 & 1/2 & 5/6 & 3/2 & 448 & & & & & \\
1/6 & 3/10 & 1/2 & 5/6 & 3/2 & 448 & & & & \\
1/14 & 1/6 & 3/10 & 1/2 & 5/6 & 3/2 & 448 & & & \\
0 & 1/14 & 1/6 & 3/10 & 1/2 & 5/6 & 3/2 & 448 & & \\
0 & 0 & 1/14 & 1/6 & 3/10 & 1/2 & 5/6 & 3/2 & 448 & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_\infty$$

$$m = 1 : 448;$$

$$m = 2 : \frac{899}{2} = 449.5;$$

$$m = 3 : \frac{808197}{1798} \approx 449.497775;$$

$$m = 4 : \frac{242188503}{538798} \approx 449.497776532;$$

$$m = 5 : \frac{217726387201}{484377006} \approx 449.497776533595;$$

$$m = 6 : \frac{195735053879083}{435452774402} \approx 449.497776533592351;$$

$$m = 7 : \frac{1231754601116629931}{2740290754307162} \approx 449.49777653359235286$$

$$m=8:\frac{553670954436947106368}{1231754601116629931}\approx 449.49777653359235287015 8;$$

$$m=9:\frac{1666566046544461900687}{3707617998461699373}\approx 449.497776533592352870153020 8.$$

Таким образом, уже девятое рациональное укорочение рекуррентной дроби дает 24 верных десятичных знаков после точки.

4 Алгебраические формы $n-$го порядка

Определение 4.1. ***Алгебраической*** (n,m)***-формой*** *(далее кратко* (n,m)***-формой****) назовем действительное число*

$$x=F(n,m)=s_0+s_1\sqrt[n]{m}+\ldots+s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}},\ n\in\mathbb{N},\ s_i,m\in\mathbb{Q}, \tag{15}$$

или n-мерный вектор

$$x=(s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}). \tag{16}$$

Очевидно, что множество (n,m)-форм с обычными операциями сложения и умножения образует поле.

1. Изоморфизм (n,m)-форм с некоторыми классами матриц

(n,m)-форме (15) поставим в соответствие циркулянт n-го порядка

$$X=\begin{pmatrix} s_0 & s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & \cdots & s_2\sqrt[n]{m^2} & s_1\sqrt[n]{m} \\ s_1\sqrt[n]{m} & s_0 & s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & \cdots & s_3\sqrt[n]{m^3} & s_2\sqrt[n]{m^2} \\ s_2\sqrt[n]{m^2} & s_1\sqrt[n]{m} & s_0 & \cdots & s_4\sqrt[n]{m^4} & s_3\sqrt[n]{m^3} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s_{n-3}\sqrt[n]{m^{n-3}} & s_{n-4}\sqrt[n]{m^{n-4}} & \cdots & s_0 & s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} \\ s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s_{n-3}\sqrt[n]{m^{n-3}} & \cdots & s_1\sqrt[n]{m} & s_0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

а (n,m)-форме (16)— матрицу вида

$$X=\begin{pmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Кождая из последних двух матриц однозначно задана своим первым столбцом.

Поскольку произведение (n,m)-форм

$$x'=s'_0+s'_1\sqrt[n]{m}+\ldots+s'_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}, \tag{19}$$

$$x''=s''_0+s''_1\sqrt[n]{m}+\ldots+s''_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} \tag{20}$$

является (n,m)-формой вида

$$x=s_0+s_1\sqrt[n]{m}+\ldots+s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}},$$

где

$$s_i = \sum_{j=0}^{i} s'_j s''_{i-j} + m \sum_{j=i+1}^{n-1} s'_j s''_{i-j},\ i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{21}$$

и соответствует первому столбцу произведения матриц X' и X'', которые соответствуют (n, m)-формам (19), (20), то справедлива

Теорема 4.1. *Множества (n, m)-форм (15), (16) изоморфны соответственно множествам матриц (17), (18).*

Таким образом, k-той степени (n, m)-формы (19) соответствует k-тая степень матрицы

$$X' =$$

$$\begin{pmatrix} s'_0 & s'_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s'_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & \cdots & s'_2\sqrt[n]{m^2} & s'_1\sqrt[n]{m} \\ s'_1\sqrt[n]{m} & s'_0 & s'_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & \cdots & s'_3\sqrt[n]{m^3} & s'_2\sqrt[n]{m^2} \\ s'_2\sqrt[n]{m^2} & s'_1\sqrt[n]{m} & s'_0 & \cdots & s'_4\sqrt[n]{m^4} & s'_3\sqrt[n]{m^3} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s'_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s'_{n-3}\sqrt[n]{m^{n-3}} & s'_{n-4}\sqrt[n]{m^{n-4}} & \cdots & s'_0 & s'_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} \\ s'_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s'_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s'_{n-3}\sqrt[n]{m^{n-3}} & \cdots & s'_1\sqrt[n]{m} & s'_0 \end{pmatrix}$$

или матрицы

$$X' = \begin{pmatrix} s'_0 & ms_{n-1} & ms'_{n-2} & \cdots & ms'_2 & ms'_1 \\ s'_1 & s'_0 & ms'_{n-1} & \cdots & ms'_3 & ms'_2 \\ s'_2 & s'_1 & s'_0 & \cdots & ms'_4 & ms'_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s'_{n-2} & s'_{n-3} & s'_{n-4} & \cdots & s'_0 & ms'_{n-1} \\ s'_{n-1} & s'_{n-2} & s'_{n-3} & \cdots & s'_1 & s'_0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно также, что если последние две матрицы умножить соответственно на матрицы-столбцы

$$X'' = \begin{pmatrix} s''_0 \\ s''_1\sqrt[n]{m} \\ s''_2\sqrt[n]{m^2} \\ \vdots \\ s''_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} \\ s''_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} \end{pmatrix},\ X'' = \begin{pmatrix} s''_0 \\ s''_1 \\ s''_2 \\ \vdots \\ s''_{n-2} \\ s''_{n-1} \end{pmatrix},$$

то получим соответственно матрицы-столбцы

$$X = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1\sqrt[n]{m} \\ s_2\sqrt[n]{m^2} \\ \vdots \\ s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} \\ s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-2} \\ s_{n-1} \end{pmatrix},$$

где s_i задаются равенствами (21).

Для любой (n,m)-формы

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$$

можно найти лишь одну (n,m)-форму

$$\overline{x} = \overline{s_0} + \overline{s_1}\sqrt[n]{m} + \ldots + \overline{s_{n-1}}\sqrt[n]{m^{n-1}}$$

такую, что их произведение $x\overline{x}$ является некоторым действительным числом. При этом (n,m)-форму $\overline{x}$ называют сопраженной (n,m)-формой к (n,m)-форме $x = F(n,m)$, а их произведение — нормой последей и обозначают через $|F(n,m)|$.

Пусть X и $\overline{X}$ — матрицы соответственные (n,m)-форме

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$$

и сопряженной (n,m)-форме $\overline{x}$. Тогда

$$X \cdot \overline{X} = |F(n,m) \cdot |E,$$

где E — единичная матрица. причем, норма (n,m)-формы x равна детерминанту матрицы X, а матрица соответственная сопряженной (n,m)-форме $\overline{x}$ является обратной матрицей к матрице X, умноженной на детерминант матрицы X.

Таким образом, n-мерным обобщением уравнения Пелля

$$\begin{vmatrix} s_0 & ms_1 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix} = s_0^2 - ms_1^2 = \pm 1$$

является уравнение

$$\begin{vmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

5 Связь $(n,m)-$форм с алгебраическими уравнениями

Найдем целые коэффициенты уравнения

$$x^n = a_{n1}x^{n-1} + a_{n2}x^{n-2} + \ldots + a_{n,n-1}x^1 + a_{n,n} \tag{22}$$

корнем которого является (n,m)-форма

$$x = F(n,m) = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}},\ s_i \in \mathbb{Q},\ m \in \mathbb{N}.$$

Пусть задана матрица

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Главный минор r-го порядка этой матрицы обозначим через (см. [**?**], стр. 13):

$$X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} & \cdots & a_{i_1,i_r} \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} & \cdots & a_{i_2,i_r} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{i_r,i_1} & a_{i_r,i_2} & \cdots & a_{i_r,i_r} \end{vmatrix},$$

где

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_r.$$

Характеристическое уравнение

$$det(X - xE) = 0,$$

матрицы (23), как известно, имеет развернутый вид

$$x^n = \alpha_{n,1}x^{n-1} + \alpha_{n,2}x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n,n-1}x^1 + \alpha_{n,n},$$

где

$$\alpha_{n,j} = (-1)^{j-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leqslant n} X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_j \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_j \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Согласно теореме Гамильтона-Кели, каждая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, поэтому справедливо тождество

$$X^n = \alpha_{n,1}X^{n-1} + \alpha_{n,2}X^{n-2} + \ldots + \alpha_{n,n-1}X^1 + \alpha_{n,n}, \tag{25}$$

с коэффициентами (24), где X — матрица (23).

Пусть матрица X в уравнении (25) задана равенством (18), тогда коэффициенты $a_{n,j}$ уравнения (22), корнем которого является (n,m)-форма (16), можно найти пользуясь равенствами (24). Таким образом, справедлива

Теорема 5.1. *Если (n,m)-форма*

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$$

является корнем уравнения

$$x^n = a_{n1}x^{n-1} + a_{n2}x^{n-2} + \ldots + a_{n,n-1}x^1 + a_{n,n},$$

то коэффициенты этого уравнения равны

$$a_{n,j} = (-1)^{j-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leqslant n} X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_j \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_j \end{pmatrix},$$

где

$$X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_j \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_j \end{pmatrix}$$

— главные миноры матрицы

$$X = \begin{pmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{pmatrix}.$$

Приведем формулы для нахождения коэффициентов алгебраических уравнений, корнями которых являются (n,m)-формы при $n=2,3,4,5$.

$$a_{21}=2s_0,\ a_{22}=-\begin{vmatrix} s_0 & ms_1 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix};$$

$$a_{31}=3s_0,\ a_{32}=-3\begin{vmatrix} s_0 & ms_2 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix},\ a_{33}=\begin{vmatrix} s_0 & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_o \end{vmatrix};$$

$$a_{41}=4s_0,\ a_{42}=-4\begin{vmatrix} s_0 & ms_3 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} s_0 & ms_2 \\ s_2 & s_0 \end{vmatrix},$$

$$a_{43}=4\begin{vmatrix} s_0 & ms_3 & ms_2 \\ s_1 & s_0 & ms_3 \\ s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix},a_{44}=-\begin{vmatrix} s_0 & ms_3 & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & ms_3 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix}.$$

$$a_{51}=5s_0,\ a_{52}=-5\begin{vmatrix} s_0 & ms_4 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} s_0 & ms_3 \\ s_2 & s_0 \end{vmatrix},$$

$$a_{53}=5\begin{vmatrix} s_0 & ms_4 & ms_3 \\ s_1 & s_0 & ms_4 \\ s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} s_0 & ms_4 & ms_2 \\ s_1 & s_0 & ms_3 \\ s_3 & s_2 & s_0 \end{vmatrix},$$

$$a_{54}=-5\begin{vmatrix} s_0 & ms_4 & ms_3 & ms_2 \\ s_1 & s_0 & ms_4 & ms_3 \\ s_2 & s_1 & s_0 & ms_4 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix},a_{55}=\begin{vmatrix} s_0 & ms_4 & ms_3 & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_4 & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & ms_4 & ms_3 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_4 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix}$$

Справедлива

Теорема 5.2. (n,m^n+1)*-форма вида*

$$m^{n-1}+m^{n-2}\sqrt[n]{m^n+1}+\ldots+m\sqrt[n]{(m^n+1)^{n-2}}+\sqrt[n]{(m^n+1)^{n-1}}$$

является корнем алгебраического уравнения

$$x^n=\binom{n}{1}m^{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{2}m^{n-2}x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}mx+\binom{n}{n}$$

Доказательство. Так как все главные миноры одинакового порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} m^{n-1} & m^n+1 & m(m^n+1) & \ldots & m^{n-3}(m^n+1) & m^{n-2}(m^n+1) \\ m^{n-2} & m^{n-1} & m^n+1 & \ldots & m^{n-4}(m^n+1) & m^{n-3}(m^n+1) \\ m^{n-3} & m^{n-2} & m^{n-1} & \ldots & m^{n-5}(m^n+1) & m^{n-4}(m^n+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m & m^2 & m^3 & \ldots & m^{n-1} & m^n+1 \\ 1 & m & m^2 & \ldots & m^{n-2} & m^{n-1} \end{pmatrix}$$

равны между собой, то достаточно найти один из них. Найдем главный минор s-того порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} m^{n-1} & m^n+1 & m(m^n+1) & \cdots & m^{s-2}(m^n+1) \\ m^{n-2} & m^{n-1} & m^n+1 & \cdots & m^{s-3}(m^n+1) \\ m^{n-3} & m^{n-2} & m^{n-1} & \cdots & m^{s-4}(m^n+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m^{n-s} & m^{n-s+1} & m^{n-s+2} & \cdots & m^{n-1} \end{pmatrix}$$

Умножим первый столбец на $-m^r, r = 1, 2, \dots, s-1$ и сложим с $(r+1)$-вым столбцом, тогда получим детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} m^{n-1} & 1 & m & \cdots & m^{s-2} \\ m^{n-2} & 0 & 1 & \cdots & m^{s-3} \\ m^{n-3} & 0 & 0 & \cdots & m^{s-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m^{n-s} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Разложим последний детерминант по элементам первого столбца, получим

$$(-1)^{s+1} m^{n-s}.$$

Таким образом, согласно теореме 5.1 коэффициент $a_{n,s}$ равен

$$(-1)^{s-1}(-1)^{s+1} m^{n-s} \binom{n}{s} = m^{n-s} \binom{n}{s}.$$

$\square$

Приведем теорему о рациональном приближении $(n, m^n + 1)$-форм.

Теорема 5.3. *k-тым рациональным приближением к (n, m^n+1)-форме является выражение*

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} a_{n1} & & & & & \\ \frac{a_{n2}}{a_{n1}} & a_{n1} & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & & & \\ \frac{a_{nn}}{a_{n,n-1}} & \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-2}} & \dots & a_{n1} & & \\ 0 & \frac{a_{nn}}{a_{n,n-1}} & \dots & \frac{a_{n2}}{a_{n1}} & a_{n1} & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right]_k,$$

где $a_{n1} = \binom{n}{1} m^{n-1}, a_{ni} = \frac{\binom{n}{i} m^{n-i}}{\binom{n}{i-1} m^{n-i+1}} = \frac{n-i+1}{im}$, $i = 2, \dots, n$.

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из теоремы 5.2, теоремы 3.2 и теоремы Островского [23] о том, что уравнение (22), все коэффициенты которого неотрицательны, причем наибольший общий делитель номеров положительных коэффициентов равен единице, имеет положительный корень, модуль которого больше модулей всех остальных корней этого уравнения. $\square$

Теорема 5.4. $(n, m^n - 1)$*-форма вида*

$$m^{n-1} + m^{n-2}\sqrt[n]{m^n - 1} + \ldots + m\sqrt[n]{(m^n-1)^{n-2}} + \sqrt[n]{(m^n-1)^{n-1}}$$

является корнем алгебраического уравнения

$$x^n = \binom{n}{1} m^{n-1} x^{n-1} - \binom{n}{2} m^{n-2} x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} \binom{n}{n-1} mx +$$

$$+ (-1)^{n-1} \binom{n}{n}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 5.2 с той лишь разницей, что минор s-того порядка имеет вид

$$\begin{vmatrix} m^{n-1} & m^n-1 & m(m^n-1) & \cdots & m^{s-2}(m^n-1) \\ m^{n-2} & m^{n-1} & m^n-1 & \cdots & m^{s-3}(m^n-1) \\ m^{n-3} & m^{n-2} & m^{n-1} & \cdots & m^{s-4}(m^n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m^{n-s} & m^{n-s+1} & m^{n-s+2} & \cdots & m^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$a_{ns} = (-1)^{s-1} m^{n-s} \binom{n}{s}.$$

□

6 Параметризация некоторых диофантовых уравнений

Как уже отмечалось выше, при заданных натуральных числах n и m и обычных операциях суммы и произведения (n,m)-формы вида $s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$ образуют числовое поле. Единицы этих числовых полей, как отмечалось выше, являются решениями диофантова уравнения

$$\begin{vmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad (26)$$

для (n,m)-формы $s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$.

Эти уравнения исключительно важны для изучения структуры групп единиц полей, образующих (n,m)-формами.

Приведем примеры диофантовых уравнений, аналогичных уравнению Пелля:

При $n = 3$ диофантово уравнение (26) в развернутом виде запишется так:

$$|F(3,m)| = s_0^3 + s_1^3 m + s_2^3 m^2 - 3s_0 s_1 s_2 m = 1, \qquad (27)$$

его частичным решением являются

$$1)\ \ m = \frac{k}{n}(p-3), s_0 = (p-2)(p-1)-1, s_1 = kn(p-2), s_2 = n(p-1),$$

$$2)\ \ m = \frac{k}{n}(p+3), s_0 = (p+2)(p+1)-1, s_1 = kn(p+2), s_2 = n(p+1), \qquad (28)$$

где $p = k^2 n$. Сопряженные к приведенным выше решениям также являются решениями этого уравнения. Вот эти решения:

$$m = \frac{k}{n}(p-3), \overline{s_0} = 1, \overline{s_1} = -nk, \overline{s_2} = n,$$

$$m = \frac{k}{n}(p+3), \overline{s_0} = 1, \overline{s_1} = nk, \overline{s_2} = -n,$$

где $p = k^2 n$.

Интересными оказываются также решения:

$$m = \frac{k}{n} \cdot \frac{p^4 - 6p^3 + 12p^2 - 9p + 3}{(p-1)^3},$$

$$s_0 = (p-2)(p-1) - 1, s_1 = kn(p-2), s_2 = n(p-1),$$

и

$$m = \frac{k}{n} \cdot \frac{p^4 - 6p^3 + 12p^2 - 9p + 3}{(p-1)^3}, s_0 = 1, s_1 = -kn, s_2 = n,$$

где $p = k^2 n$.

Для нахождения целых единиц последовательных натуральных чисел m можно использовать формулы

$$2)\ \ m, \ \ s_0 = (p-2)(p-1) - 1, s_1 = kn(p-2), s_2 = n(p-1),$$

где $p = k^2 n, n = \frac{3k}{k^3 - m}$,

$$2)\ \ m, \ \ s_0 = (p-2)(p-1) - 1, s_1 = kn(p-2), s_2 = n(p-1),$$

и $p = k^2 n, n = \frac{3k}{k^3 + m}$.

У [24], [25] приведено таблицы целых единиц для всех натуральных значений не больших 70 и 250 соответственно. Таблица Вада (H. Wada) была построена при помощи алгоритма Вороного. Однако, этот алгоритм плохо программируется, особенно для простых значений m, и сложный.

Пример 6.1. При помощи параметризации (28) диофантова уравнения (27) можно, например, получить его численное решение для простого 900-цифрового числа

$$m = 7239872283931086911936409478464844362964969622795111359$$

974934755582575468179641313855769259727641974609798138893255

525211182516975159833221705921278768192182515320441657882401

010319428973812885522960333217672876733752301462230992931472

909904767713450913240634917893148613016192814762213558096464

402885840589676123168302402549079960138122269110454764380482

620797212301828876999333286096636315349989543361123952286204

679568796728357647509618040687075931376908228422344437391718

598847301096960325148718064874625829071932050706560411935363

097129685477802808489613517468157406211390960108809283162275

086186714073920595021715659951203220403390183303468032708161

048148186272608066667799184997780960378585296561952602849633

261805881923550356499415702867592774593662323899734807289980

768201261654488304289541162853189580522455748182295602375207

298343703588386419599807672013076867243091847913861105093811

84003 :

$s_0 = 524157506876335327434518685209315033260245191753990179$9
932282202278664005900121988404431292090932896640188251981680
326006813119732590132197563293690094647723171139535411516659
033189312863606609940147337891254811171282064557496488402243
617969658697073506591959974748435341221226735197582720381982
299223922948600684651564931177032848265679312201428827959001
983962562284328721926456192013117840486119368302870988948460
525587477841663879827970098875001133833949548499240589613091
535101060988495239283487157834796036977947636759176039961934
635983735619442324532910010967441297842323402115179325365224
245869281413952853346561463816495884323228588257539790111535
747953054994512900080325152302710423732719820889455301956641
861857282819629676959400601048120714983887659901278623613182
407879535162028668083576182989214435953539550841881883975282
254526281252669102943716630553173127420155080795347352070812
016381586784193433265072280590538909341829945733502452641625
931520640623887413956468162623695016290163104755307070450565
018386797664109367099985840845436742946338689084059438529370
980293569397369513919276599750601135570615318764192038306604
625048781009391683175362913228909806064167749424746695866250
167155583420998090725390393566830479390865308186951243348805
128955195908146359128484607204108672995078355407650230047302
525656852598329814864510572426666443716411444025574130235274
997855448580076587298245238361118200320906537084395631166706
552169049171921781816738304163317987099463732868320419686342
623468541037782483471350549375617711059947138423616726380877
798997774685802919400817546371507105036207154258163449863192
006072439921566891914553763235700570806637937053080647921850
659312149431138678443461371406707470566960647591054958666507
537418684478798007861256778237664233271272397518289447699995
52001,

$s_1 = 583738281245308019278251001268605689595320718532407316$3
326897981957933682949695513507983491029486920012188627504494

1778939216579582203887840013702758560980373830855317629635229711891563216831034766488845541211457079196270548221350249967135983227928957357758127145085229347721013613526838614327200739001141069122270582712638354885141737762109297130317281430206589809593980296361201224876516148191735469903171077865171784102154008563438582147165534263704239514805530966757127744689580776993398327054879041420901682004087227702011415826645604524494056421294402503570986854254460745669180602197911323630071627464081158329545416278857980216355039476429253496842825340146472166574341754608022287080116851708951507723255710876155502923369318293090135720090927670090803257575235365915100139926187549580683299975474758695310481426024472421187784938063791246267457642022742603041407146638435549578959108986984141864331273243233675792631270487645590734053060717718825968269516216380347974683397583398997679736612169507649135984161710911170712590671935672746045751850759768836994294293260045901245782080429690223130068585211589393564284498506424166582158884063816349543639722459709537738311132591909051453536519104233872536292048033092748741450562617333162244144188198827751199541097564337997956703777066684016802402252447983420448669006585298426071993786161597675522970466736914808012641717662482042465211657049448973108237283948135748482750270978220905041313944575789878263858106342365675264976461233415398720,

$s_2 = 6500915784301066706315708295484201254229616201498503033$ 225936513615050993420189616701616830178378071900836470490154657732067457179957157657333794851256034894968136264330763326483001404178215065556482015470095055770440336314987404707539118687843607883638753785153045831999214567483283266963033324468627959776406039326130905280422733774603240810130346764707423355372082736401680347264707967374459504414866071427807368389132735593909933021176828597417494084702604708765657062133864315777701770554890487564019276485209166532788447229289032521767451176009243507500541324892087509388127480599318372094

$$
\begin{gathered}
999301811585407932194506720014955341892574612453650759890353 \\
844472637357540963976598058842306100267767040583926200220331 \\
394772756556429720546343529771198353817635073590399931530726 \\
700341972023621915539455287084102154147498148194464706290738 \\
447968542450197421140538927732429020141632262305192523267917 \\
425330324681548207507671518477644745204713871088804078414990 \\
541919034200578212140280834001696317177767049206304425999422 \\
159180067619206014434655679173528173324398774833309779609240 \\
928488267568439044748816208777357041657525580606925980057317 \\
088906832160714842155446850596898250005557236090621965750468 \\
30440,
\end{gathered}
$$

где $n = k = \lfloor 10^{300}\{10^{10}\pi\}\rfloor + 374$, а символом $\{\cdot\}$ обозначено дробную часть числа, т.е.

$$
\begin{gathered}
k = n = 8979323846264338327950288419716939937510582097494459230 7 \\
816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844 \\
609550582231725359408128481117450284102701938521105559644622 \\
948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201 \\
909145648566923460348610454326648213393607260249141273724587 \\
0440
\end{gathered}
$$

В этом примере m — простое 900-цифровое число, а s_0, s_1, s_2 — числа, состоящие соответственно из $1800, 1500, 1300$ цифр.

При $n = 5$ уравнение (26) примет вид

$$
\begin{gathered}
|F(5, m)| = (s_0^5 + s_1^5 m + s_2^5 m^2 + s_3^5 m^3 + s_4^5 m^4) - \\
-5(s_0^3 s_1 s_4 m + s_0^3 s_2 s_3 m + s_1^3 s_0 s_2 m + s_1^3 s_3 s_4 m^2 + s_2^3 s_0 s_4 m^2 + +s_2^3 s_1 s_3 m^2 \\
+s_3^3 s_0 s_1 m^2 + s_3^3 s_2 s_4 m^3 + s_4^3 s_0 s_3 m^3 + s_4^3 s_1 s_2 m^3) + 5(s_0^2 s_1^2 s_3 m + s_0^2 s_2 s_4^2 m^2 \\
+s_1 s_0^2 s_2^2 m + s_4 s_0^2 s_3^2 m^2 + s_0 s_4^2 s_1^2 m^2 + s_0 s_2^2 s_3^2 m^2 + s_1^2 s_4 s_2^2 m^2 + s_2 s_1^2 s_3^2 m^2 \\
+s_1 s_3^2 s_4^2 m^3 + s_4^2 s_2^2 s_3 m^3) - 5 s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 m^2 = 1.
\end{gathered}
$$

Его частичными решениями являются:

$$
1)\, |F(5, m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^4 - 5),
$$

$$
s_0 = 1, s_1 = -rk^3, s_2 = 2rk^2, s_3 = -2rk, s_4 = r,
$$

$$
2)\, |F(5, m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^4 - 5),
$$

$$
s_0 = 1 + 30r^2k^8 - 25rk^4 + r^4k^{16} - 10r^3k^{12},
$$

$$
s_1 = rk^3(r^3k^{12} - 9r^2k^8 + 23rk^4 - 14),
$$

$$s_2 = rk^2(r^3k^{12} - 8r^2k^8 + 17rk^4 - 7),$$
$$s_3 = kr(r^3k^{12} - 7r^2k^8 + 12rk^4 - 3),$$
$$s_4 = r(r^3k^{12} - 6r^2k^8 + 8rk^4 - 1)$$

$$3)\, |F(5, m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^4 + 5),$$
$$s_0 = 1, s_1 = rk^3, s_2 = -2rk^2, s_3 = 2rk, s_4 = -r,$$
$$4)\, |F(5, m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^4 + 5),$$
$$s_0 = 1 + 30r^2k^8 + 25rk^4 + r^4k^{16} + 10r^3k^{12},$$
$$s_1 = rk^3(r^3k^{12} + 9r^2k^8 + 23rk^4 + 14),$$
$$s_2 = rk^2(r^3k^{12} + 8r^2k^8 + 17rk^4 + 7),$$
$$s_3 = kr(r^3k^{12} + 7r^2k^8 + 12rk^4 + 3),$$
$$s_4 = r(r^3k^{12} + 6r^2k^8 + 8rk^4 + 1)$$

Запишем несколько взаимно сопряженных пар решений диофантовых уравнений (26) при $n = 7, 9, 11$:

$$1)\, |F(7, m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^6 - 7),$$
$$s_0 = 1, s_1 = -rk^5, s_2 = 3rk^4, s_3 = -5rk^3, s_4 = 5rk^2,$$
$$s_5 = -3rk, s_6 = r,$$
$$2)\, |F(7, m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^6 - 7),$$
$$s_0 = r^6k^{36} - 21r^5k^{30} + 161r^4k^{24} - 539r^3k^{18} + 721r^2k^{12} - 245rk^6 + 1,$$
$$s_1 = rk^5(r^5k^{30} - 20r^4k^{24} + 144r^3k^{18} - 442r^2k^{12} + 516rk^6 - 132),$$
$$s_2 = rk^4(r^5k^{30} - 19r^4k^{24} + 128r^3k^{18} - 358r^2k^{12} + 360rk^6 - 66),$$
$$s_3 = rk^3(r^5k^{30} - 18r^4k^{24} + 113r^3k^{18} - 286r^2k^{12} + 244rk^6 - 30),$$
$$s_4 = rk^2(r^5k^{30} - 17r^4k^{24} + 99r^3k^{18} - 225r^2k^{12} + 160rk^6 - 12),$$
$$s_5 = rk(r^5k^{30} - 16r^4k^{24} + 86r^3k^{18} - 174r^2k^{12} + 101rk^6 - 4),$$
$$s_6 = r(r^5k^{30} - 15r^4k^{24} + 74r^3k^{18} - 132r^2k^{12} + 61rk^6 - 1)$$

$$3)\, |F(7, m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^6 + 7),$$
$$s_0 = 1, s_1 = rk^5, s_2 = -3rk^4, s_3 = 5rk^3, s_4 = -5rk^2,$$
$$s_5 = 3rk, s_6 = -r,$$
$$4)\, |F(7, m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^6 + 7),$$
$$s_0 = r^6k^{36} + 21r^5k^{30} + 161r^4k^{24} + 539r^3k^{18} + 721r^2k^{12} + 245rk^6 + 1,$$
$$s_1 = rk^5(r^5k^{30} + 20r^4k^{24} + 144r^3k^{18} + 442r^2k^{12} + 516rk^6 + 132),$$
$$s_2 = rk^4(r^5k^{30} + 19r^4k^{24} + 128r^3k^{18} + 358r^2k^{12} + 360rk^6 + 66),$$

$$s_3 = rk^3(r^5k^{30} + 18r^4k^{24} + 113r^3k^{18} + 286r^2k^{12} + 244rk^6 + 30),$$
$$s_4 = rk^2(r^5k^{30} + 17r^4k^{24} + 99r^3k^{18} + 225r^2k^{12} + 160rk^6 + 12),$$
$$s_5 = rk(r^5k^{30} + 16r^4k^{24} + 86r^3k^{18} + 174r^2k^{12} + 101rk^6 + 4),$$
$$s_6 = r(r^5k^{30} + 15r^4k^{24} + 74r^3k^{18} + 132r^2k^{12} + 61rk^6 + 1)$$

$$1)\, |F(9,m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^8 - 3),$$
$$s_0 = 1, s_1 = -rk^7, s_2 = rk^6, s_3 = -rk^5, s_4 = 2rk^4,$$
$$s_5 = -2rk^3, s_6 = rk^2, s_7 = -rk, s_8 = r,$$
$$2)\, |F(9,m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^8 - 3),$$
$$s_0 = 9m^4k^{32} - 54k^{24}m^3 + 97m^2k^{16} - 48mk^8 + 1,$$
$$s_1 = mk^7(9k^{24}m^3 - 51m^2k^{16} + 84mk^8 - 35),$$
$$s_2 = mk^6(9k^{24}m^3 - 48m^2k^{16} + 72mk^8 - 25),$$
$$s_3 = k^5m(9k^{24}m^3 - 45m^2k^{16} + 61mk^8 - 17),$$
$$s_4 = mk^4(9k^{24}m^3 - 42m^2k^{16} + 51mk^8 - 11),$$
$$s_5 = k^3m(9k^{24}m^3 - 39m^2k^{16} + 42mk^8 - 7),$$
$$s_6 = k^2m(9k^{24}m^3 - 36m^2k^{16} + 34mk^8 - 4),$$
$$s_7 = mk(9k^{24}m^3 - 33m^2k^{16} + 27mk^8 - 2),$$
$$s_8 = m(9k^{24}m^3 - 30m^2k^{16} + 21mk^8 - 1),$$

$$3)\, |F(9,m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^8 + 3),$$
$$s_0 = 1, s_1 = rk^7, s_2 = -rk^6, s_3 = rk^5, s_4 = -2rk^4,$$
$$s_5 = 2rk^3, s_6 = -rk^2, s_7 = rk, s_8 = -r,$$
$$4)\, |F(9,m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^8 + 3),$$
$$s_0 = 9m^4k^{32} + 54k^{24}m^3 + 97m^2k^{16} + 48mk^8 + 1,$$
$$s_1 = mk^7(9k^{24}m^3 + 51m^2k^{16} + 84mk^8 + 35),$$
$$s_2 = mk^6(9k^{24}m^3 + 48m^2k^{16} + 72mk^8 + 25),$$
$$s_3 = k^5m(9k^{24}m^3 + 45m^2k^{16} + 61mk^8 + 17),$$
$$s_4 = mk^4(9k^{24}m^3 + 42m^2k^{16} + 51mk^8 + 11),$$
$$s_5 = k^3m(9k^{24}m^3 + 39m^2k^{16} + 42mk^8 + 7),$$
$$s_6 = k^2m(9k^{24}m^3 + 36m^2k^{16} + 34mk^8 + 4),$$
$$s_7 = mk(9k^{24}m^3 + 33m^2k^{16} + 27mk^8 + 2),$$
$$s_8 = m(9k^{24}m^3 + 30m^2k^{16} + 21mk^8 + 1),$$

Решениями диофантова уравнения

$$|F(11,m)| =$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 & ms_3 & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 & ms_3 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 \\ s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 \\ s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 \\ s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 \\ s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 \\ s_9 & s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} \\ s_{10} & s_9 & s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix} = 1$$

являются:

$$1)\, m = \frac{k}{r} \cdot (rk^{10} - 11),$$

$$s_0 = 1, s_1 = -rk^9, s_2 = 5rk^8, s_3 = -15rk^7,$$

$$s_4 = 30rk^6, s_5 = -42rk^5, s_6 = 42rk^4, s_7 = -30rk^3, s_8 = 15rk^2,$$

$$s_9 = -5rk, s_{10} = r,$$

$$2)\, m = \frac{k}{r} \cdot (rk^{10} - 11),$$

$$s_0 = r^{10}k^{100} - 55r^9k^{90} + 1265r^8k^{80} - 15730r^7k^{70} + 114037r^6k^{60} -$$

$$-483637r^5k^{50} + 1137015r^4k^{40} - 1295910r^3k^{30} + 527329r^2k^{20} -$$

$$-32065rk^{10} + 1,$$

$$s_1 = rk^9(r^9k^{90} - 54r^8k^{80} + 1216r^7k^{70} - 14749r^6k^{60} + 103758r^5k^{50} -$$

$$423776r^4k^{40} + 947934r^3k^{30} - 1005966r^2k^{20} + 363493rk^{10} - 16796),$$

$$s_2 = rk^8(r^9k^{90} - 53r^8k^{80} + 1168r^7k^{70} - 13811r^6k^{60} + 94212r^5k^{50} -$$

$$-370171r^4k^{40} + 786526r^3k^{30} - 774787r^2k^{20} + 246779rk^{10} - 8398),$$

$$s_3 = rk^7(r^9k^{90} - 52r^8k^{80} + 1121r^7k^{70} - 12915r^6k^{60} + 85362r^5k^{50} -$$

$$-322301r^4k^{40} + 649346r^3k^{30} - 591812r^2k^{20} + 164814rk^{10} - 3978),$$

$$s_4 = rk^6(r^9k^{90} - 51r^8k^{80} + 1075r^7k^{70} - 12060r^6k^{60} + 77172r^5k^{50} -$$

$$-279676r^4k^{40} + 533294r^3k^{30} - 448110r^2k^{20} + 108134rk^{10} - 1768),$$

$$s_5 = rk^5(r^9k^{90} - 50r^8k^{80} + 1030r^7k^{70} - 11245r^6k^{60} + 69607r^5k^{50} -$$

$$-241836r^4k^{40} + 435590r^3k^{30} - 336175r^2k^{20} + 69589rk^{10} - 728),$$

$$s_6 = rk^4(r^9k^{90} - 49r^8k^{80} + 986r^7k^{70} - 10469r^6k^{60} + 62633r^5k^{50} -$$

$$-208350r^4k^{40} + 353750r^3k^{30} - 249740r^2k^{20} + 43849rk^{10} - 273),$$

$$s_7 = rk^3(r^9k^{90} - 48r^8k^{80} + 943r^7k^{70} - 9731r^6k^{60} + 56217r^5k^{50} -$$

$$-178815r^4k^{40} + 285563r^3k^{30} - 183609r^2k^{20} + 26998rk^{10} - 91),$$

$$s_8 = rk^2(r^9k^{90} - 47r^8k^{80} + 901r^7k^{70} - 9030r^6k^{60} + 50327r^5k^{50} -$$

$$-152855r^4k^{40} + 229069r^3k^{30} - 133506r^2k^{20} + 16204rk^{10} - 26),$$

$$s_9 = rk(r^9k^{90} - 46r^8k^{80} + 860r^7k^{70} - 8365r^6k^{60} + 44932r^5k^{50} -$$

$$-130120r^4k^{40}+182538r^3k^{30}-95940r^2k^{20}+9454rk^{10}-6),$$

$$s_{10}=r(r^9k^{90}-45r^8k^{80}+820r^7k^{70}-7735r^6k^{60}+40002r^5k^{50}-$$

$$-110285r^4k^{40}+144450r^3k^{30}-68085r^2k^{20}+5344rk^{10}-1),$$

$$3)\, m=\frac{k}{r}\cdot(rk^{10}+11),$$

$$s_0=1, s_1=rk^9, s_2=-5rk^8, s_3=15rk^7,$$

$$s_4=-30rk^6, s_5=42rk^5, s_6=-42rk^4, s_7=30rk^3, s_8=-15rk^2,$$

$$s_9=5rk, s_{10}=-r,$$

$$4)\, m=\frac{k}{r}\cdot(rk^{10}+11),$$

$$s_0=r^{10}r^{100}+55r^9k^{90}+1265r^8k^{80}+15730r^7k^{70}+114037r^6k^{60}+$$

$$483637r^5k^{50}+1137015r^4k^{40}+1295910r^3k^{30}+527329r^2k^{20}+$$

$$+32065rk^{10}+1,$$

$$s_1=rk^9(r^9k^{90}+54r^8k^{80}+1216r^7k^{70}+14749r^6k^{60}+103758r^5k^{50}+$$

$$423776r^4k^{40}+947934r^3k^{30}+1005966r^2k^{20}+363493rk^{10}+16796),$$

$$s_2=rk^8(r^9k^{90}+53r^8k^{80}+1168r^7k^{70}+13811r^6k^{60}+94212r^5k^{50}+$$

$$+370171r^4k^{40}+786526r^3k^{30}+774787r^2k^{20}+246779rk^{10}+8398),$$

$$s_3=rk^7(r^9k^{90}+52r^8k^{80}+1121r^7k^{70}+12915r^6k^{60}+85362r^5k^{50}+$$

$$+322301r^4k^{40}+649346r^3k^{30}+591812r^2k^{20}+164814rk^{10}+3978),$$

$$s_4=rk^6(r^9k^{90}+51r^8k^{80}+1075r^7k^{70}+12060r^6k^{60}+77172r^5k^{50}+$$

$$+279676r^4k^{40}+533294r^3k^{30}+448110r^2k^{20}+108134rk^{10}+1768),$$

$$s_5=rk^5(r^9k^{90}+50r^8k^{80}+1030r^7k^{70}+11245r^6k^{60}+69607r^5k^{50}+$$

$$+241836r^4k^{40}+435590r^3k^{30}+336175r^2k^{20}+69589rk^{10}+728),$$

$$s_6=rk^4(r^9k^{90}+49r^8k^{80}+986r^7k^{70}+10469r^6k^{60}+62633r^5k^{50}+$$

$$+208350r^4k^{40}+353750r^3k^{30}+249740r^2k^{20}+43849rk^{10}+273),$$

$$s_7=rk^3(r^9k^{90}+48r^8k^{80}+943r^7k^{70}+9731r^6k^{60}+56217r^5k^{50}+$$

$$+178815r^4k^{40}+285563r^3k^{30}+183609r^2k^{20}+26998rk^{10}+91),$$

$$s_8=rk^2(r^9k^{90}+47r^8k^{80}+901r^7k^{70}+9030r^6k^{60}+50327r^5k^{50}+$$

$$+152855r^4k^{40}+229069r^3k^{30}+133506r^2k^{20}+16204rk^{10}+26),$$

$$s_9=rk(r^9k^{90}+46r^8k^{80}+860r^7k^{70}+8365r^6k^{60}+44932r^5k^{50}+$$

$$+130120r^4k^{40}+182538r^3k^{30}+95940r^2k^{20}+9454rk^{10}+6),$$

$$s_{10}=r(r^9k^{90}+45r^8k^{80}+820r^7k^{70}+7735r^6k^{60}+40002r^5k^{50}+$$

$$+110285r^4k^{40}+144450r^3k^{30}+68085r^2k^{20}+5344rk^{10}+1)$$

и т. д.

Примечание 6.1. *Модули коэффициентов многочленов, которые являются решениями диофантовых уравнений* $|F(2n-1,m)|=1$, *очевидно связаны с числовым треугольником*

$$\begin{array}{llllll} n=2: & 1 & & & & \\ n=3: & 1 & 2 & & & \\ n=4: & 1 & 3 & 5 & & \\ n=5: & 1 & 1 & 1 & 2 & \\ n=6: & 1 & 5 & 15 & 30 & 42 \end{array},$$

а элементы этого числового треугольника с факторизацией числа $2n-1$.

Примечание 6.2. *Свободные члены многочленов, которые являются решениями 2) и 4) также связаны с приведенным выше числовым треугольником.*

Например, для модулей свободных членов $s_6^0, s_7^0, s_8^0, s_9^0, s_{10}^0$ *многочленов* $s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}$ *решений 2) и 4) диофантова уравнения* $|F(11,m)|=1$ *справедливы соотношения:*

$$s_{10}^0 = 1,$$

$$s_9^0 - s_{10}^0 = 5,$$

$$s_8^0 - 2s_9^0 + s_{10}^0 = 15,$$

$$s_7^0 - 3s_8^0 + 3s_9^0 - s_{10}^0 = 30,$$

$$s_6^0 - 4s_7^0 + 6s_8^0 - 4s_9^0 + s_{10}^0 = 42.$$

Приведем примеры решений уравнения

$$|F(n,m)| = \pm 1,$$

которые вытекают из теорем 5.2, 5.4.

Теорема 6.1. *Решениями диофантовых решений*

$$|F(n, m^n - 1)| = 1, n = 2, 3, \dots,$$

$$|F(2n-1, m^{2n-1} + 1)| = 1, n = 2, 3, \dots,$$

$$|F(2n, m^{2n} + 1)| = -1, n = 1, 2, \dots$$

являются соответственно:

$$s_0 = m^{n-1}, s_1 = m^{n-2}, \dots, s_{n-2} = m, s_{n-1} = 1,$$

$$s_0 = m^{2n-2}, s_1 = m^{2n-3}, \dots, s_{2n-3} = m, s_{2n-2} = 1,$$

$$s_0 = m^{2n-1}, s_1 = m^{2n-2}, \dots, s_{2n-2} = m, s_{2n-1} = 1.$$

Легко находятся и сопряженные решения к приведенным в этой теореме решениям.

Список литературы

[1] *Euler L.* De fractinibus continuis // Comm. Acad. Sci. Imper. Petropol., 1737, v. 9.

[2] *Poincare H.* Sur une generalization des fractiones continues // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1884. V. 99. P. 1014-1016.

[3] *Jacobi C.G.J.* Allgemeine Theorie der Kettenbruchanlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. Reine Angew. Math., 1868. V. 69. P. 29-64. // Gesammelte Werke, Bd. IV. Berlin: Reimer, 1891. S. 385-426.

[4] *Perron O.* Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus // Math. Ann. 1907. V. 64. P. 1-76.

[5] *Brun V.* En generalisation av Kjedebroken // Skrifter utgit av Videnskapsselskapeti Kristiania. I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse 1919. N 6; 1920. N 6.

[6] *Bernstein L.* The Jacobi-Perron algorithm - its theory and application. LNM 207. Berlin/Heidelberg/New York: Springer Verlag, 1971.

[7] *Пустыльников Л.Д.* Обобщенные цепные дроби и эргодическая теория // УМН, 2003, т. 58, N 1, с. 113-164.

[8] *Lejeune Dirichlet G.P.* Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // S.-B. press. Akad. Wiss. 1842. S. 93-95 // Werke. Bd. I. Berlin: Reimer, 1889, S. 635-638.

[9] *Hermite Ch.* Lettres de M. Ch. Hermite a M. Jacobi sur differents objets de la theorie des nombres // J. Reine Angew. Math. 1850, Bd. 40, S. 261-315 // Oeuvres, T. I, Paris: Gauther-Villares, 1905, p. 100-163 // Opuscule Mathematica de Jacobi, v. II.

[10] *Klein F.* Uber eine geometrische Auffassung der gewohnlichen Kettenbruchentwicklung // Nachr. Ges. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl. 1895. N 3. S. 357-359.

[11] *Minkowski H.* Generalisation de le theorie des fractions continues // Ann. Sci. Ec. Norm. Super. ser III, 1896, t. 13, p. 41-60. Also in: Gesamm. Abh. I, p. 278-292.

[12] *Вороной Г.Ф.* Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей. Варшава: Из-во Варш. Ун-та, 1896. Также: Собр. соч. в 3-х томах. Киев: Из-во АН УССР, 1952. Т. 1. С. 197-391.

[13] *Скубенко Б.Ф.* Минимумы разложимых кубических форм от трех переменных // Записки научных семинаров Ленинградского отделения математич. ин-та им. Стеклова (ЛОМИ). 1988, т. 168, с. 125-139.

[14] *Арнольд В.И.* Цепные дроби. М.: МЦНМО, 2001.

[15] *Брюно А.Д.* Разложения алгебраических чисел в цепные дроби // Журнал вычислительной матем. и матем. физики, 1964, т. 4, N 2, с. 211-221.

[16] *Вороной Г.Ф.* Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей, Докторская диссертация, Варшава, 1896 г.

[17] *Делоне Б.Н., Фаддеев Д.К.* Теория иррациональностей третьей степени. Труды МИ им. В.А. Стеклова, М. 1940, 340 с.

[18] Buchmann J. A generalization of Voronois unit algorithm, I, II, J. Number Theory **20**(1985), 177-191, 192-209.

[19] *Fürshtenau E.* Über Kettenbruche höherer Ordnung // Jahrbuch uber die Fortschritte der Mathematik. — 1876. — S. 133–135.

[20] *H.Poincaré* Sur les équations linéaires aux différentielles et aux différences finies, Amer. J. Math., 1885, v. 7, 203–258.

[21] *Манин Ю.И.* Рациональные точки на алгебраических кривых// Успехи математических наук, т. XIX, вып. 6 (120) (1964), 83-87.

[22] *Zatorsky R.A.* Theory of paradeterminants and its applications // Algebra and Diskrete Mathematics №1, 2007, pp. 109-138.

[23] *Прасолов В.В.* Многочлены. — 3-е изд., исправленное. — М.: МЦНМО, 2003. — 336 с.

[24] *Делоне Б.Н., Фаддеев Д.К.* Теория иррациональностей третьей степени. М.:Изд-во АН СССР, 1940 г., 340 с.

[25] *Wada H.* A Table o f Fundamental Units o f Purely Cubic Fields. Proc. Japan Acad., 46 (1970), p 1135-1140.

Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника
Украина
romazz@rambler.ru